

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Центр оценки качества образования



Международное исследование качества математического
и естественнонаучного образования

Математика (профильный уровень)

Тетрадь



Республика/ край/ область _____

Район _____

Город/ село _____

Школа _____ класс _____

Фамилия, имя _____



TIMSS & PIRLS

International Study Center

Lynch School of Education, Boston College

По материалам исследования TIMSS 2008

Инструкция

Вам дается 90 минут для ответа на задания, которые содержатся в этой тетради. Важно, чтобы вы приступили к каждому вопросу и постарались ответить на него как можно лучше.

Можно использовать калькулятор и математические формулы, которые приведены после инструкции. Однако нельзя использовать никакие устройства, позволяющие получить доступ в Интернет.

В некоторых заданиях от вас потребуется **выбрать верный ответ** из предложенных вариантов и отметить кружок около того ответа, который вы считаете верным, как это сделано в примере 1.

Пример 1

Пример 1

Какова формула площади круга?

- (A) $S = 2\pi r$
- (B) $S = \pi r^2$
- (C) $S = 4\pi r^2$
- (D) $S = \frac{4}{3}\pi r^3$

Если вы не уверены в том, как ответить на вопрос, то выберите из предложенных вариантов тот ответ, который, как вы думаете, скорее всего, является верным.

Если вы хотите изменить данный вами ответ, то зачеркните «X» ваш первоначальный ответ и отметьте кружок около ответа, который вы считаете верным, как это сделано в примере 2.

Пример 2

Пример 2

Какова формула площади круга?

- (A) $S = 2\pi r$
- (B) $S = \pi r^2$
- (C) $S = 4\pi r^2$
- (D) $S = \frac{4}{3}\pi r^3$

Инструкция (продолжение)

В других заданиях от вас потребуется **записать ответ в тетради на отведенном для него месте**. В некоторых из этих заданий вас попросят показать проделанную вами работу. К этим заданиям вы должны записать **полное объяснение** или **все шаги решения**, которые вы сделали для получения ответа.

Пример 3

Найдите координаты точек пересечения графиков функций $f(x) = x + 2$ и $g(x) = x^2$.

Приведите свое решение.

$$x^2 = x + 2$$

$$y = x + 2$$

$$y = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$y = 2 + 2$$

$$y = -1 + 2$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$y = 4$$

$$y = 1$$

$$x = 2 \text{ или } x = -1$$

$$(2; 4)$$

$$(-1; 1)$$

Пример 3

Если при выполнении подобного задания вы использовали калькулятор, вы все равно должны описать шаги, проделанные для получения ответа. Приведенная ниже запись иллюстрирует возможный вариант объяснения при использовании калькулятора в Примере 3.

Построены графики $f(x) = x + 2$ и $g(x) = x^2$ на калькуляторе.

Точки пересечения: $x = 2$ и $x = -1$

$$f(2) = 4$$

$$f(-1) = 1$$

$$(2; 4) \text{ и } (-1; 1)$$

Пример 3

Когда вы закончите выполнение всех заданий, которые содержатся в этой тетради, пожалуйста, ответьте на вопросы краткой анкеты **относительно использования калькулятора**, которая помещена в конце тетради.

Некоторые математические формулы

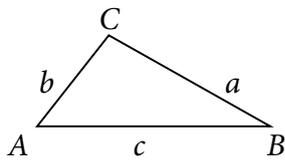
Комплексные числа

$$i^2 = -1$$

Если $z = x + iy = r(\cos A + i \sin A)$,
где x и y действительные числа, то

$$z^n = [r(\cos A + i \sin A)]^n = r^n (\cos nA + i \sin nA)$$

Тригонометрия



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Логарифмы

Если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $b \neq 1$ и $c \neq 1$, то

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Арифметическая прогрессия

Если a_n – n -й член арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d , то:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Если S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии, то:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Геометрическая прогрессия

Если b_n – n -й член геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q , то $b_n = b_1 q^{n-1}$

Если S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии, то

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1$$

Если S – сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q , где $|q| < 1$, то:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

(продолжение на следующей странице)

Некоторые математические формулы (продолжение)

Формула корней квадратного уравнения Математический анализ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Длина, площадь и объем

Если d – расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Если $f(x) = g(h(x))$, то $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$S_{\text{бок}} = 2\pi rh$ – площадь боковой поверхности цилиндра

$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ – площадь боковой поверхности конуса

$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$ – площадь поверхности сферы

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$



Не переворачивайте эту страницу и не начинайте выполнять задания, пока вам не скажут об этом.

1

Функции f и g заданы формулами $f(x) = x - 1$ и $g(x) = (x + 3)^2$.

Найдите $g(f(x))$

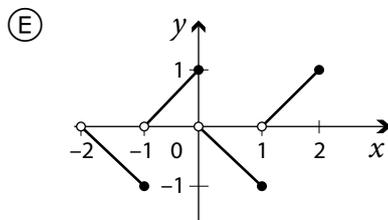
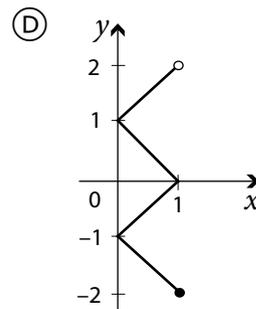
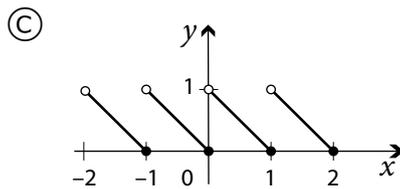
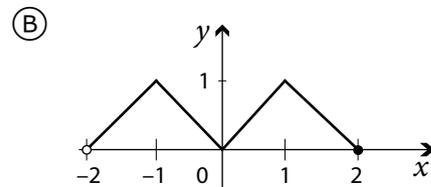
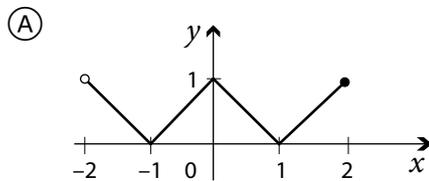
- Ⓐ $(x - 1)(x + 3)^2$
- Ⓑ $(x + 3)^2 - 1$
- Ⓒ $(2x - 2)^2$
- Ⓓ $(x + 2)^2$
- Ⓔ $x^2 + 8$

2

Функция f определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{при } -2 < x \leq -1 \\ x+1 & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ -x+1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{при } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

На каком из рисунков изображен график этой функции?



МА13002

3

Для прогнозирования прибыли y (в долларах) от продажи x тысяч единиц некоторого товара ($0 < x < 5$) предложены две математические модели, основанные на разных методах маркетинга.

$$\text{Модель P: } y = 6x - x^2$$

$$\text{Модель Q: } y = 2x$$

Для каких значений x в модели Q прогнозируется бóльшая прибыль, чем в модели P?

- (A) $0 < x < 4$
- (B) $0 < x < 5$
- (C) $3 < x < 5$
- (D) $3 < x < 4$
- (E) $4 < x < 5$

МА13003

4

Вычислите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)(x+1)}{3x^2-2}$.

- (A) $-\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{2}{3}$
- (C) 1
- (D) 6
- (E) ∞

МА13004

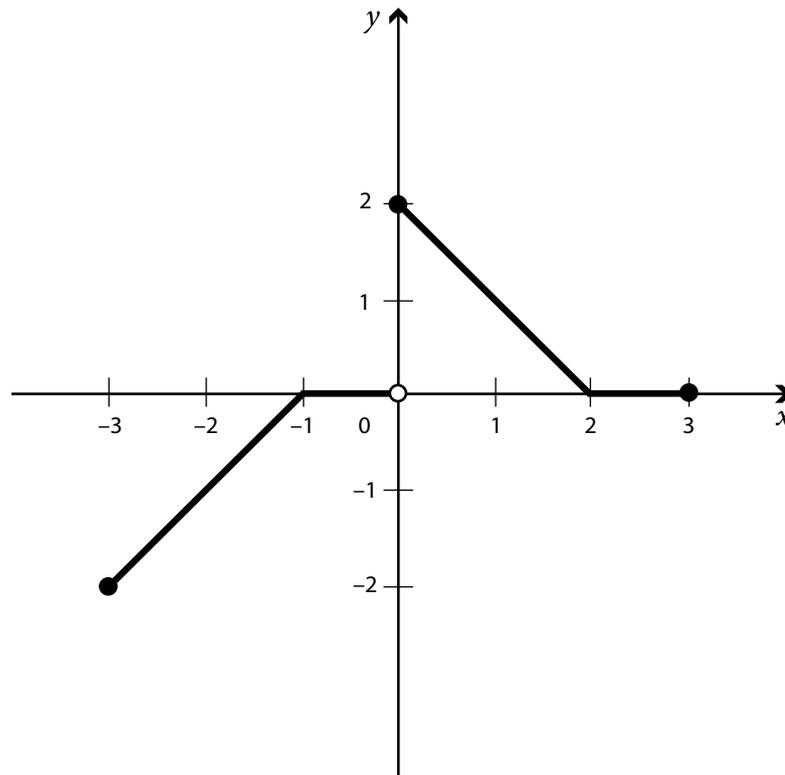
5

Вычислите интеграл $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

- Ⓐ $-3\frac{1}{8}$
- Ⓑ 1
- Ⓒ $2\frac{5}{8}$
- Ⓓ 4
- Ⓔ $4\frac{1}{2}$

6

Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-3; 3]$ следующим графиком:

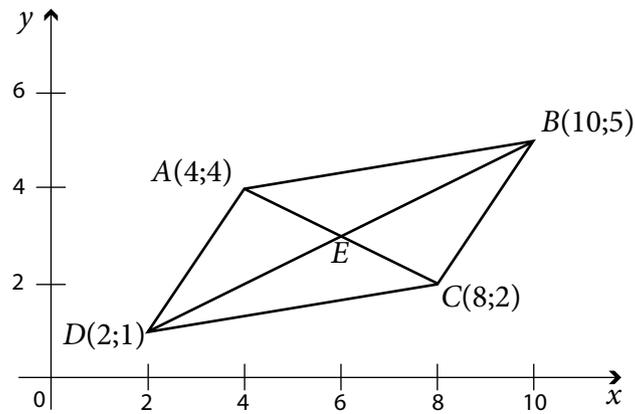


А. Для каких значений x в интервале $(-3; 3)$ функция $f(x)$ НЕ является непрерывной?

В. Для каких значений x в интервале $(-3; 3)$ функция $f(x)$ НЕ дифференцируема?

7

В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке E . ДОКАЖИТЕ, что точка E является серединой диагоналей AC и BD .



Запишите доказательство.

8

Все члены бесконечной геометрической прогрессии положительны, первый член равен 3, а третий член равен $\frac{1}{3}$. Чему равна сумма этой прогрессии?

- (A) $\frac{27}{8}$
- (B) $\frac{10}{3}$
- (C) $\frac{9}{4}$
- (D) $\frac{9}{2}$

MA23069

9

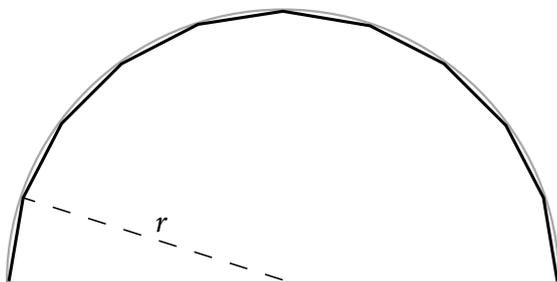
Решите неравенство $\frac{x+1}{x-2} > 1$.

Ответ: _____

M6_02

MA23135

10



На рисунке изображена комната (вид сверху), которая имеет форму полукруга. Архитектор планирует расположить подряд 10 одинаковых плоских окон на круглой стене комнаты, как показано на рисунке. По какой из следующих формул, где r – радиус круга, архитектор может вычислить ширину w каждого окна?

- (A) $w = r \sin 9^\circ$
- (B) $w = 2r \sin 9^\circ$
- (C) $w = r \cos 18^\circ$
- (D) $w = 2r \sin 18^\circ$

MA23021

11

Вычислите $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

Приведите решение.

M6_04

MA23165

12

Найдите $f'(x)$, если $f(x) = e^{\cos x}$.

- (A) $e^{\cos x}$
- (B) $e^{-\sin x}$
- (C) $e^{\cos x} \cdot \sin x$
- (D) $-e^{\cos x} \cdot \sin x$

M6_05

MA23039

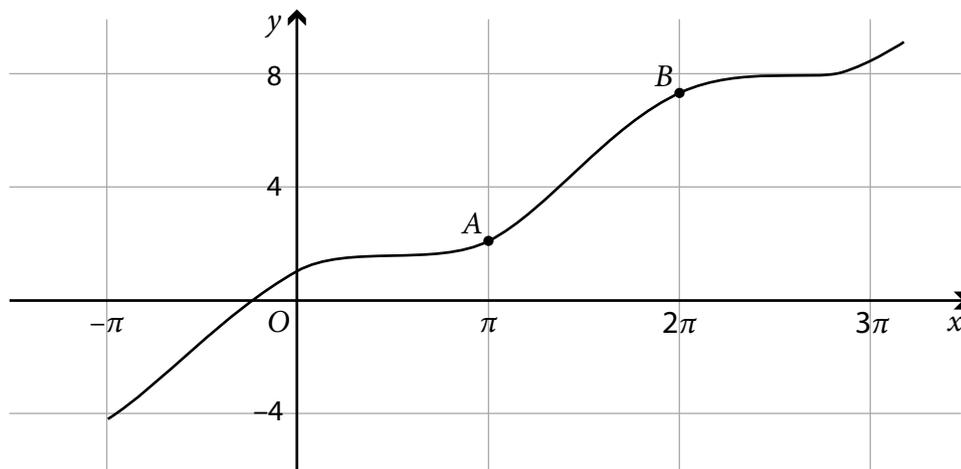
13

Найдите $f'(x)$, если $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$.

Приведите решение.

M6_06

МА23159

14

M6_07

На рисунке изображен график функции $y = x + \cos x$. Софья утверждает, что угловые коэффициенты касательных к этому графику в точках A и B одинаковы. Объясните, почему ее утверждение верно.

МА23198

15

Укажите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$ при $x > 0$.

- Ⓐ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^2} + C$
- Ⓑ $\frac{1}{2}x^2 + 2 \ln x + C$
- Ⓒ $\frac{1}{2}x^2 + \ln 2x + C$
- Ⓓ $\frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + C$

MA23042

16

Сколько корней имеет уравнение $\sin x + \cos x = 2$ на интервале $(0; 8\pi)$?

- Ⓐ 0
- Ⓑ 2
- Ⓒ 4
- Ⓓ 8

MA23080

17

Лист бумаги толщиной 0,01 см разрезали пополам и одну часть положили на другую. Затем полученную стопку из двух листов снова разрезали пополам и сложили в стопку из четырех листов. Какой толщины получится стопка бумаги, если эту операцию проделать еще 8 раз?

- Ⓐ 0,2 см
- Ⓑ 10,24 см
- Ⓒ 20,48 см
- Ⓓ 32,0 см

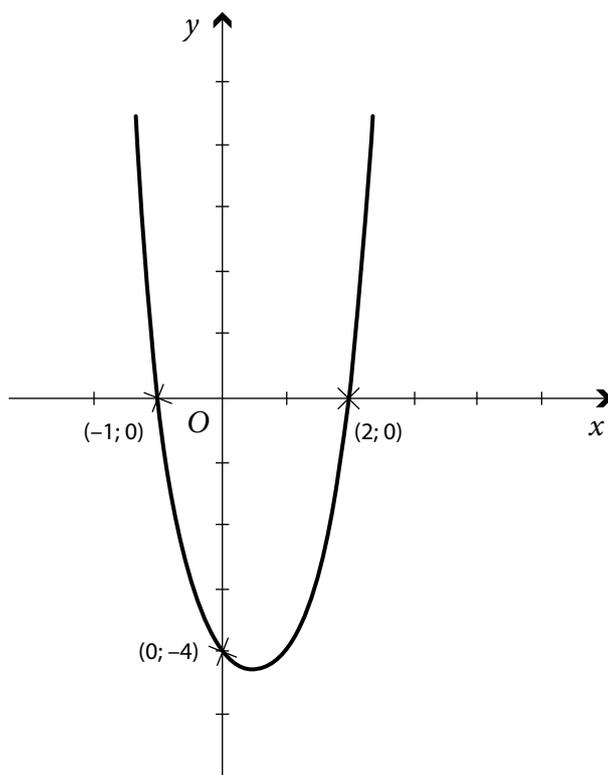
MA23004

18

Какому из следующих чисел равно $\frac{5}{x}$, если $x = -1 + \frac{1}{2}i$?

- Ⓐ $-5 + i$
- Ⓑ $-4 - 2i$
- Ⓒ $-4 + 2i$
- Ⓓ $4 + 2i$

MA23063



На рисунке изображен график функции f , которая задается формулой $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значения коэффициентов a , b и c .

Приведите решение.

20

Функция f задана формулой $f(x) = x^2 + 4$, а функция g задана формулой $g(u) = \sqrt{2u - 1}$. Найдите наименьшее значение функции $g(f(x))$.

- Ⓐ 0
- Ⓑ $\sqrt{3}$
- Ⓒ $\sqrt{\frac{7}{2}}$
- Ⓓ $\sqrt{7}$

MA23133

21

Приближаясь к железнодорожному переезду, машина начинает тормозить и за время торможения в течение t секунд проезжает расстояние $s(t) = -t^2 + 20t$ метров. Какое расстояние проедет машина с момента начала торможения до полной остановки?

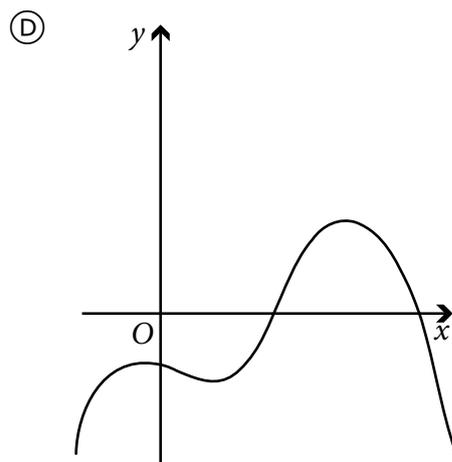
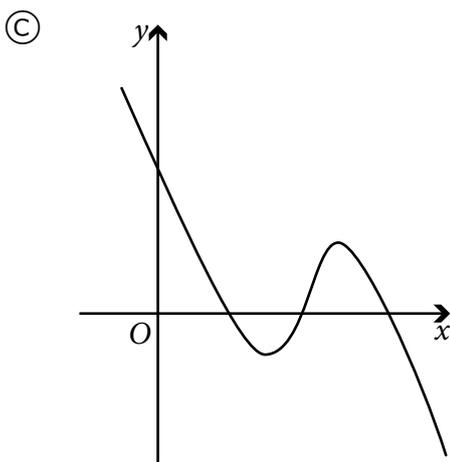
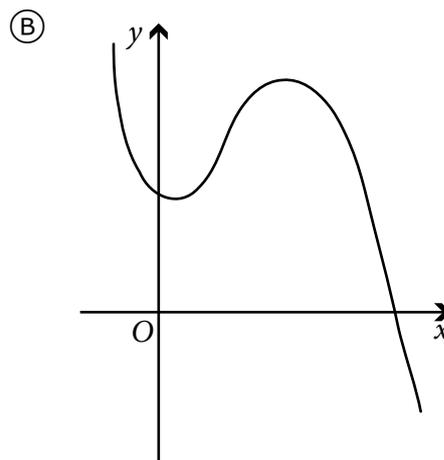
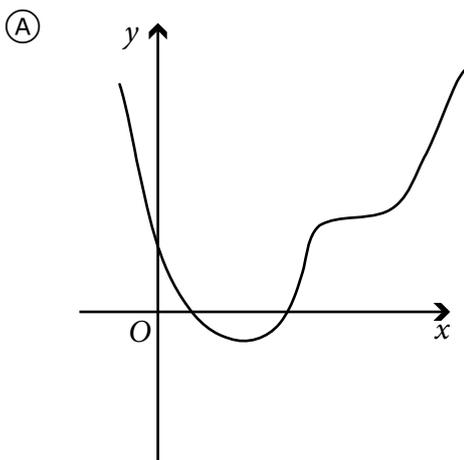
- Ⓐ – 20 м
- Ⓑ 10 м
- Ⓒ 50 м
- Ⓓ 100 м

MA23158

22

Какой из предложенных ниже графиков обладает всеми следующими свойствами:

$$f(-1) > 0, f(3) < 0, f'(5) = 0, f''(5) < 0 ?$$



$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

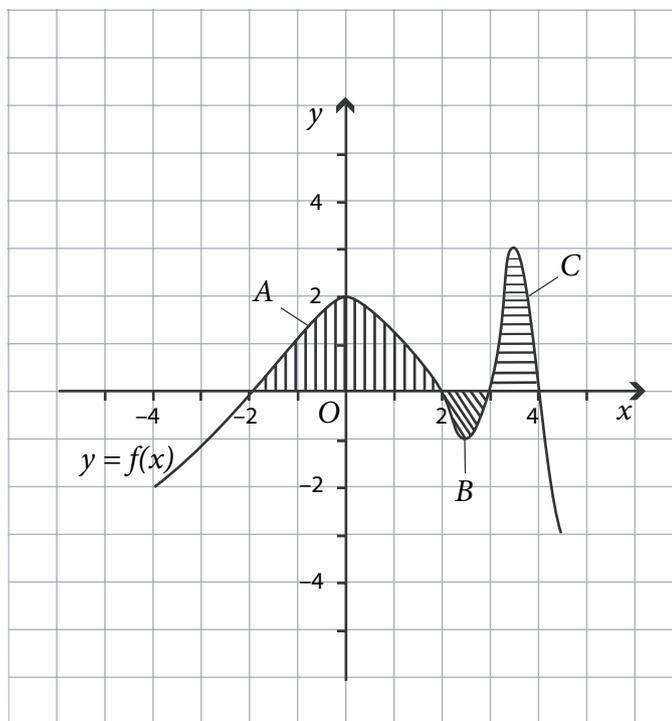
- А. Найдите значение абсцисс точек пересечения графика данной функции с осью Ox .

$x =$ _____

- В. Найдите точки максимума и минимума данной функции.

Точка(и) максимума: _____

Точка(и) минимума: _____



Фигуры, расположенные на рисунке между графиком функции $y = f(x)$ и осью абсцисс, имеют следующие площади: фигура $A - 4,8$, фигура $B - 0,8$, фигура $C - 2$.

Чему равен интеграл $\int_{-2}^4 f(x)dx$?

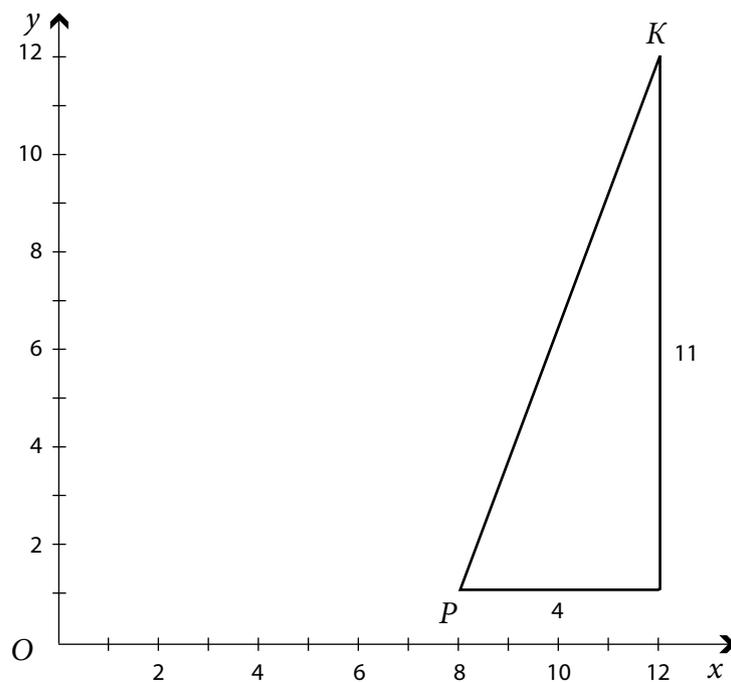
- (A) 5,6
- (B) 6,0
- (C) 6,8
- (D) 7,6

25

Каков общий вид первообразных для функции $f(x) = e^{1+4x}$?

- Ⓐ $\frac{1}{4}e^{1+4x} + C$
- Ⓑ $e^{1+4x} + C$
- Ⓒ $4e^{1+4x} + C$
- Ⓓ $e^{x+2x^2} + C$

МА23041



Прямая l проходит через точки $A(1; -2)$ и $B(3; 4)$. Параллельна ли прямая l прямой PK ?

Объясните свой ответ.

Использование калькулятора

1. Пользовались ли вы калькулятором при выполнении заданий в этой тетради?

- Ⓐ Да
- Ⓑ Нет

Если вы не пользовались калькулятором, то вам не надо отвечать на последующие вопросы. Благодарим вас.

Если вы пользовались калькулятором, пожалуйста, ответьте на каждый из следующих вопросов.

2. Калькулятор, который я использовал ...

- Ⓐ простой – выполняет только основные операции (+, −, ·, : , % или $\sqrt{\quad}$), но не может находить значения таких функций, как \log , \sin , \cos ;
- Ⓑ научный – выполняет основные операции (+, −, ·, : , % или $\sqrt{\quad}$), а также может находить значения таких функций, как \log , \sin , \cos ;
- Ⓒ программируемый – выполняет все, что делает научный калькулятор, и может хранить и выполнять короткие программы;
- Ⓓ графический – выполняет все, что делают научный и программируемый калькуляторы, и может изображать на дисплее некоторые графики.

3. При выполнении теста я пользовался калькулятором ...

- Ⓐ очень редко (при ответе менее чем на 5 вопросов)
- Ⓑ иногда (при ответе на 5-10 вопросов)
- Ⓒ достаточно часто (при ответе более чем на 10 вопросов).

4. Марка и модель калькулятора, которым я пользовался, – это _____.

Благодарим вас за то, что вы ответили на поставленные вопросы!



BOSTON
COLLEGE

TIMSS
Advanced
2015

Международное исследование качества математического
и естественнонаучного образования

Тетрадь

Математика
(профильный уровень)

D1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Институт стратегии развития образования
Российской академии образования
Центр оценки качества образования
105062 Москва, ул. Макаренко, д. 5/16
тел./факс: (495)621-76-36
e-mail: centeroko@mail.ru
<http://www.centeroko.ru>



© IEA
International Association
for the Evaluation of
Educational Achievement

timssandpirls.bc.edu